# 基于一类 *T*-模的模糊 Hopfield 网络的稳定性分析

张义荣[1],刘普寅[2],鲜 明[1],肖顺平[1]
(1. 国防科技大学电子科学与工程学院,湖南长沙 410073;2. 国防科技大学理学院,湖南长沙 410073)

**摘 要**: 本文建立了基于一类 *T*-模的一种动态模糊神经网络-( ∨, *T*) Hopfield 网. 文章首先证明了系统本身的稳定性及系统平衡态的 Lyapunov 稳定性,然后建立了吸引子的一个非平凡吸引域,使系统具有良好的容错性. 最后,通过例子验证了得到的结论.

**关键词**: Hopfield 网; *T*-模; 吸引子; 吸引域; Lyapunov 稳定性
**中图分类号**: TP183 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2002) 01-0030-04

# Stability Analysis of a Class of Fuzzy Hopfield Networks Based on T-Norms

ZHANG Yi-rong[1], LIU Pu-yin[2], XIAN Ming[1], XIAO Shun-ping[1]
(1. *School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan* 410073, *China*;
2. *School of Science, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan* 410073, *China*)

**Abstract**: The paper sets up a class of dynamical fuzzy neural network systems, i.e. so-called ( ∨, *T*) fuzzy Hopfield networks based on *L*-*T*-norms. We prove the uniform stability of the system and the Lyapunov stability of the equilibrium points at first, then obtain a nontrivially attractive basin of the attractor so that the system has good fault-tolerance. Finally, simulation examples demonstrate our conclusions.

**Key words**: Hopfield networks; *T*-norms; attractor; attractive basin; fault-tolerance; Lyapunov stability

## 1 引言

模糊神经网络(Fuzzy Neural Network)虽然在七十年代中期就有学者提出,但对其进行系统的研究,则是在 1987 年, Kosko 在[1]中提出了模糊联想记忆(Fuzzy Associative Memory),使基于模糊算子的网络具有回想的特征,之后,FNNs 以其优良的性能以及在许多实际领域的广泛应用而受到了人们的普遍关注,在模式识别,模糊预测,控制与决策等领域都有 FNNs 的成功应用. 虽然人们基于各种不同的应用提出了许多不同的 FNNs,但根据其内部运算可将其分为两类:一类是正则 FNN,其输入、输出、连接权都是模糊集,其内部运算基于标准的模糊算术及扩张准则;另一类是基于模糊逻辑的 FNN,其内部运算建立在三角模算子之上,输入、输出、连接权取值于[0,1]或更一般一些取值于某一类格上. 其中最重要的一种模运算是( ∨, ∧)算子,对应的 max-min FNNs 研究取得了非常丰富的成果[1,3,4,6]. 然而,max-min FNNs 的研究主要集中于前向网络,可由下式表示:

$$Y = X \circ W \tag{1}$$

其中输入模式 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \in [0,1]^m$ 为输出模式, $W = (w_{ij})_{n\times m}$ 为连接权矩阵,“$\circ$”为取大 - 取小运算,即

$$y_j = \bigvee_{i=1}^{n} (x_i \wedge w_{ij}) \quad (j = 1, 2, \cdots, m) \tag{2}$$

通过选择合适的权矩阵,系统(1)可用于联想和记忆. 然而,关于(1)的容错性(Fault-tolerance)研究较少[3],从而制约了(1)的应用. 到目前为止,对(1)的研究主要集中于权矩阵 $W$ 的学习算法,以便该系统可存储尽可能多的模式. 问题在于,若(1)的输入向量不完整或含有噪声时,系统(1)能进行正确的联想吗? 本文建立了基于一类 *T*-模的模糊 Hopfield 网络, $W = (w_{ij})_{n\times n}$ 为连接权矩阵, $w_{ij} \in [0,1]$. 给定初始向量 $X(0) = (x_1(0), x_2(0), \cdots, x_n(0)) \in [0,1]^n$,网络的状态可由下式描述:

$$x_j(t) = \bigvee_{i=1}^{n} (x_i(t-1)\, T w_{ij}) \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

这里 $t = 1, 2, \cdots$ 为迭代次数.

用 ∨-*T* 运算,式(3)可写成:

$$X(t) = X(t-1) \circ_T W \tag{4}$$

**定义 1** $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 称为系统(4)的稳定状态,若 $B = B \circ_T W$,即 $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,有 $b_j = \bigvee_{i=1}^{n} (b_i T w_{ij})$. $B$ 亦称为(4)的平衡点. 若 $B$ 为稳定状态,则 $B$ 之吸引域 $A_f(B) \subset [0,1]^n$ 是指: $\forall X \in A_f(B)$,以 $X$ 为初始模式,则系统可收敛到

收稿日期:2000-04-28;修回日期:2001-04-15

$B$. 若集合 $A_f(B)$ 在 $[0,1]^n$ 中之测度大于零,则称 $A_f(B)$ 为 $B$ 之非平凡吸引域. 若(3)最终可收敛于系统的一个平衡点,则联想过程完成. 这样,FAMs 就可由一个不断迭代至系统稳态的过程来描述.

## 2　系统稳定性分析

首先给出 T-模的定义.

**定义 2**　称映射 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 为三角模,若 $T$ 满足:

(1) $T(0,0)=0$, $T(1,1)=1$

(2) $\forall a,b\in[0,1]$, $T(a,b)=T(b,a)$

(3) $\forall a,b,c\in[0,1]$, $T((a,b),c)=T(a,(b,c))$

(4) 若 $a,b,c,d\in[0,1]$,且 $a\le b$, $c\le d$,那么 $T(a,c)\le T(b,d)$

设 T-为三角模,且 $\forall a,b\in[0,1]$, $T(a,1)=a$, $T(a,0)=0$,称 $T$ 为 T-模. 在下文中,假设 T-模还满足如下条件:

(5) 利普希兹条件: $T(x,y)$ 在 $[0,1]^2$ 关于 $x$ 满足利普希兹条件,即

$\exists$常数 $C>0$, $\forall(x_1,y),(x_2,y)\in[0,1]^2$,使得: $|T(x_1,y)-T(x_2,y)|<C\cdot|x_1-x_2|$ 此时,称 T-模为 L-T 模.

由定义 2 易知, $T_1$ = "$\wedge$" 和 $T_2$ = "$\cdot$" 满足条件(1) - (5),所以 $T_1$, $T_2$ 皆为 L-T 模. 为讨论方便计,下文中记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$, $P=\{1,2,\cdots,p\}$, $M=\{1,2,\cdots,m\}$, $C$ 为 $L$ 常数. 网络(4)的内部运算总假设为 $(V,T)$ 复合运算.

设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,定义模式 $X$, $Y$ 的海明距离(Hamming-Distance)为 $H(X,Y)=\sum_{i\in N}|x_i-y_i|$;进一步可定义矩阵间的海明距离,若 $A=(a_{ij})_{n\times m}$, $B=(b_{ij})_{n\times m}$,则 $H(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}-b_{ij}|$;并且对于模糊矩阵 $W_1=(w_{ij}^1)_{n\times n}$, $W_2=(w_{ij}^2)_{n\times n}$,引入"$\subset$"的意义, $W_1\subset W_2$ 是指: $\forall i,j\in N$, $w_{ij}^1\le w_{ij}^2$.

**定义 3**　设 $\{A^k\}_{k\in N}$ 为一矩阵序列, $A^*$ 为一矩阵,称 $\{A^k\}_{k\in N}$ 依海明距离收敛到 $A^*$ 是指: $\forall\varepsilon>0$, $\exists K$ ($K$ 为自然数),使得: $\forall k>K$, $H(A^k,A^*)<\varepsilon$. 记作:

$$A^k\xrightarrow{H}A^*\ (k\to\infty)$$

**引理 1**[3]　设 $h>0$,且 $a_i,b_i\in[0,1]$ $(i\in N)$,满足: $|a_i-b_i|<h$ $(\forall i\in N)$,那么

$$\left|\bigvee_{i\in N}a_i-\bigvee_{i\in N}b_i\right|<h$$

这里略去引理 1 的证明.

**引理 2**　若 $W^k\xrightarrow{H}W^*$ $(k\to\infty)$, $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in[0,1]^n$ 为模糊模式,那么

(1) $Ao_TW^k\xrightarrow{H}Ao_TW^*$ $(k\to\infty)$

(2) $W^*o_TW^l=W^*$ $(\forall l\in N)$

**证明**　① 记 $W^k=(w_{ij}^k)_{n\times n}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists K$, ($K$ 为自然数),使得: $\forall k>K$,有

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j}^{n}|w_{ij}^k-w_{ij}^*|<\varepsilon/(C\cdot n)$, $\forall i,j\in N$,从而, $|w_{ij}^k-w_{ij}^*|<\varepsilon/(C\cdot n)$,那么 $|a_jTw_{ji}^k-a_jTw_{ji}^*|\le C\cdot|w_{ij}^k-w_{ij}^*|<\varepsilon/n$

由引理 1 知

$$\left|\bigvee_{j\in N}(a_jTw_{ij}^k)-\bigvee_{j\in N}(a_jT_{ji}^{w^*})\right|<\varepsilon/n$$

设对 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 用 $A_i$ 表示其第 $i$ 个分量 $a_i$,于是

$$H(Ao_TW^k,Ao_TW^*)=\sum_{i\in N}|(Ao_TW^k)_i-(Ao_TW^*)_i|$$
$$=\sum_{i\in N}\left|\bigvee_{j\in N}(a_jTw_{ji}^k)-\bigvee_{j\in N}(a_jTw_{ji}^*)\right|<\varepsilon$$

从而　$$Ao_TW^k\xrightarrow{H}Ao_TW^*\ (k\to\infty)$$

同理可证:对任何矩阵 $A_{n\times n}$,有

$$W^ko_TA\xrightarrow{H}W^*o_TA\ (k\to\infty)$$

② 由 ①取 $A=W^l$,于是:

$$\lim_k(W^{k+l})=W^*o_Tw^l$$

又 $\lim_k(W^{k+l})=W^*$,所以 $W^*o_Tw^l=W^*$ $(\forall l\in N)$.

下面来讨论系统本身的稳定性. 系统(4)本身的稳定性是指:对于任意的初始模糊模式 $X$,系统(4)将收敛至它的一个平衡点.

**定理 1**　若 $W\subset Wo_TW$,则系统(4)必可收敛到它的平衡点.

**证明**　对任何的模式 $X$,记 $X(0)=X$, $W^{k+1}=W^ko_Tw$, $k=1,2,\cdots$. 由式(4)有:

$X(k)=X(k-1)o_Tw$,从而 $X(k)=X(0)o_TW^k$. 而 $W\subset W^2$,由 $T$ 的不减性可知, $W^k\subset W^{k+1}$, $k=1,2,\cdots$. 从而对任何自然数 $K$,有　$W\subset W^2\subset\cdots W^k\subset\cdots$

又 $0\le w_{ij}^k\le1$, $\forall i,j\in N$, $\forall$自然数 $k$,由单调有界定理,

$$w_{ij}^k\to w_{ij}^*\ (k\to\infty)$$

即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists K$ ($K$ 为自然数),使得: $\forall k>K$,有

$$|w_{ij}^k-w_{ij}^*|<\varepsilon/n^2$$

于是　$$H(W^k,W^*)=\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}|w_{ij}^k-w_{ij}^*|<\varepsilon$$

因此　$$W^k\xrightarrow{H}W^*\ (k\to\infty)$$

由引理 2(1)得　$X(k)\xrightarrow{H}X(0)o_TW^*$ $(k\to\infty)$

进一步可知:　$X(0)o_TW^*o_Tw=X(0)o_TW^*$

即 $X(0)o_TW^*$ 为系统(4)的一个平衡点.

**定义 4**　设 $B$ 为系统(4)的一个平衡点, $B$ 称为 Lyapunov 稳定的,是指: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,使 $\forall X:H(X,B)<\delta$,有 $H(X(k),B)<\varepsilon$ $(k=1,2,\cdots)$, $X(0)=X$, $X(k)$ 为(4)之 $k$ 步迭代. 满足 Lyapunov 稳定性的平衡点也称为系统吸引子.

**定理 2**　若模式 $B$ 为系统(4)之平衡点,那么 $B$ 是 Lyapunov 稳定的.

**证明**　$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon/(C\cdot n)$, $\forall X:H(X,B)<\delta$,让 $X(0)=X$, $X(k)$ 为(4)之 $k$ 步迭代. 由于 $X(k)=X(0)o_TW^k$,记 $W^k=(w_{ij}^k)_{n\times n}$, $X(k)=(x_1(k),x_2(k),\cdots,x_n(k))$ ($\forall$自然数 $k$), $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 于是

$$x_j(k)=\bigvee_{i\in N}(x_i(0)\ Tw_{ij}^k)$$
$$b_j=\bigvee_{i\in N}(b_iTw_{ij}^k),\ \forall j\in N$$

由于 $H(X,B)<\delta$,即 $\forall i\in N, |x_i(0)-b_i|<\varepsilon/(C\cdot n)$

因此可知 $\forall i\in N, |x_i(0)Tw_{ij}^k-b_iTw_{ij}^k|\le C\cdot|x_i(0)-b_i|\le C\cdot\varepsilon/(C\cdot n)=\varepsilon/n$

又由引理 1

$$\left|\bigvee_{i\in N}(x_iTw_{ij}^k)-\bigvee_{i\in N}(b_iTw_{ij}^k)\right|<\varepsilon/n$$

亦即 $\forall j\in N, |x_j(k)-b_j|<\varepsilon/n$,于是

$$H(X(k),B)=\sum_{i\in N} x_j(k)-b_j|<\varepsilon$$

定理得证.

由定理 2,不再区分系统(4)之平衡点和吸引子. 对于模式,$\forall j\in N$ 记 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in[0,1]^n$

$$S_j(B)=\{i\in N|\ T(b_i,w_{ij})\ge b_j\} \tag{5}$$

下面的定理给出了模式 $B$ 为系统(4)之吸引子的充要条件.

**定理 3** 模式 $B$ 为系统(4)之吸引子的充要条件为:

(1) $\forall i,j\in N, w_{ij}Tb_i\le b_j$

(2) $\forall j\in N, S_j(B)\ne\varnothing$

定理 3 的证明比较容易,这里略去.

## 3 系统的容错性分析

FNN 的容错性描述了系统的输入模式含有噪声时或输入不完整时系统回想已存储的模式的能力. 而系统之吸引域则刻划了系统容错能力的大小. 下面导出系统(4)的吸引子的吸引域. 设有模式 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 和连接权矩阵 $W=(w_{ij})_{n\times n}$, $\forall i\in N$,记

$G^i(B,W)=\{j\in N|\ T(b_j,w_{ij})=b_j$ 且 $w_{ij}\ne b_j\}\cup\{j\in N|\ T(b_j,w_{ij})<b_j$ 且 $w_{ij}\ge b_j\}$

$E^i(B,W)=\{j\in N|\ T(b_j,w_{ij})=b_j$ 且 $w_{ij}=b_j\}$

$GE(B,W)=\{i\in N|\ G^i(B,W)\ne\varnothing$ 且 $E^i(B,W)\ne\varnothing\}$

$E(B,W)=\{i\in N|\ G^i(B,W)=\varnothing$ 但 $E^i(B,W)\ne\varnothing\}$

$G(B,W)=\{i\in N|\ G^i(B,W)\ne\varnothing$ 且 $E^i(B,W)=\varnothing\}$

$L(B,W)=\{i\in N|\ G^i(B,W)\cup E^i(B,W)=\varnothing\}$

$$b_i^1(B)=\begin{cases}\bigvee_{j\in E^i(B,W)} b_j & E^i(B,W)\ne\varnothing\\ 0 & E^i(B,W)=\varnothing\end{cases} \tag{6}$$

$$b_i^2(B)=\begin{cases}\bigwedge_{j\in G^i(B,W)} b_j & G^i(B,W)\ne\varnothing\\ 1 & G^i(B,W)=\varnothing\end{cases} \tag{7}$$

进一步,若 $\forall j_1\in E^i(B,W), j_2\in G^i(B,W)$,有 $b_{j_1}<b_{j_2}(\forall i\in N)$,则记

$A_f(B,W)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n|\ x_i\in[b_i^1(B),b_i^2(B)]$,若 $i\in GE(B,W)$;

$x_i\in[0,b_i^2(B)]$,若 $i\in G(B,W)$; $x_i\in[b_i^1(B),1]$,若 $i\in E(B,W)$;

$x_i\in[0,1]$,若 $i\in L(B,W)\}$ (8)

称 $W,B$ 满足关系式 $B\propto W$,是指:

(1) $\forall j_1\in E^i(B,W), j_2\in G^i(B,W)$,有 $b_{j_1}<b_{j_2}(\forall i\in N)$

(2) $\forall j\in N, \exists i\in N$,使 $j\in E^i(B,W)$

**定理 4** 若模式 $B$ 为系统(4)之吸引子,且 $B\propto W$,那么 $\forall X\in A_f(B,W)$, $X$ 只需一步即可收敛到 $B$.

**证明** 由 $B\propto W$,易知 $\forall i\in N, b_i^1(B)<b_i^2(B)$,对每一个给定的 $j\in N$ 及 $X\in A_f(B,W)$,由于 $B\propto W$,所以 $\exists i_0\in N$,使 $j\in E^{i_0}(B,W)$,于是 $i_0\in GE(B,W)\cup E(B,W)$;并且注意到 $j\in E^{i_0}(B,W)$,从而

$$\bigvee_{i\in GE(B,W)\cup E(B,W)}(x_iTw_{ij})\ge\bigvee_{i\in GE(B,W)\cup E(B,W)}(b_i^1(B)Tw_{ij})\ge\bigvee_{i\in GE(B,W)\cup E(B,W)}((\bigvee_{k\in E^i(B,W)} b_k)Tw_{ij})\ge b_j$$

于是

$$\bigvee_{i\in N}(x_iTw_{ij})=(\bigvee_{i\in GE(B,W)}(x_iTw_{ij}))\vee(\bigvee_{i\in G(B,W)}(x_iTw_{ij}))\vee(\bigvee_{i\in E(B,W)}(x_iTw_{ij}))\vee(\bigvee_{i\in L(B,W)}(x_iTw_{ij}))\ge(\bigvee_{i\in GE(B,W)\cup E(B,W)}(x_iTw_{ij}))\ge b_j$$

成立.

另一方面,对于 $j\in N$,记

$$l_1(q)=\bigvee_{i\in G(B,W)}(w_{ij}Tb_i^2)(B)=\bigvee_{i\in G(B,W)}(w_{ij}T(\bigwedge_{k\in G^i(B,W)}b_k))=\bigvee_{i\in G(B,W)|\,j\in G^i(B,W)}(w_{ij}T(\bigwedge_{k\in G^i(B,W)}b_k))\vee(\bigvee_{i\in G(B,W)|\,j\notin G^i(B,W)}(w_{ij}T(\bigwedge_{k\in G^i(B,W)}b_k)))$$

由于 $j\in G^i(B,W)$,有 $\bigwedge_{k\in G^i(B,W)}b_k\le b_j$, $T(b_j,w_{ij})\le b_j$; $j\notin G^i(B,W)$,因 $i\in G(B,W)$,即 $E^i(B,W)=\varnothing$,从而 $j\notin G^i(B,W)\cup E^i(B,W)$,那么 $j\in\{k\in N|\ T(b_k,w_{ik})<b_k$ 且 $w_{ik}<b_k\}\triangleq R(B,W)$,所以

$$\bigvee_{i\in G(B,W)}(x_iTw_{ij})\le l_1(q)\le b_j$$

同理

$$\bigvee_{i\in E(B,W)}(x_iTw_{ij})\le\bigvee_{i\in E(B,W)}w_{ij}\triangleq l_2(q)=\bigvee_{i\in G(B,W)|\,j\in E^i(B,W)}(x_iTw_{ij})\bigvee_{i\in E(B,W)|\,j\notin E^i(B,W)}(x_iTw_{ij}))$$

由于 $j\in E^i(B,W)$,从而 $w_{ij}=b_j$,而若 $j\notin E^i(B,W)$,因 $i\in E(B,W)$,于是 $G^i(B,W)=\varnothing$,所以

$$\bigvee_{i\in E(B,W)}(x_iTw_{ij})\le l_2(q)\le b_j$$

又 $\bigvee_{i\in GE(B,W)}(x_iTw_{ij})\le\bigvee_{i\in GE(B,W)}(b_i^2(B)Tw_{ij})\triangleq l_3(q)=\bigvee_{i\in GE(B,W)}((\bigwedge_{k\in G^i(B,W)}b_k)Tw_{ij})=\bigvee_{i\in GE(B,W)|\,j\in G^i(B,W)}(w_{ij}T(\bigwedge_{k\in G^i(B,W)}b_k))\vee(\bigvee_{i\in GE(B,W)|\,j\notin G^i(B,W)}(w_{ij}T(\bigwedge_{k\in G^i(B,W)}b_k)))$

由于 $j\in G^i(B,W)$,可推出 $\bigwedge_{k\in G^i(B,W)}b_k\le b_j$, $T(b_j,w_{ij})\le b_j$; $j\notin G^i(B,W)$,可推出 $i\in E^i(B,W)\cup R(B,W)$. 即总有 $w_{ij}\le b_j$. 所以

$$\bigvee_{i\in GE(B,W)}(x_iTw_{ij})\le l_3(q)\le b_j$$

又 $\bigvee_{i\in L(B,W)}(x_iTw_{ij})\le b_j$,故而

$$\bigvee_{i\in N}(x_iTw_{ij})\le l_1(q)\vee l_2(q)\vee l_3(q)\vee(\bigvee_{i\in L(B,W)}(x_iTw_{ij}))\le b_j$$

综上有: $\forall j\in N, \bigvee_{i\in N}(x_iTw_{ij})=b_j$,定理得证.

## 4 例子

在这里,给出了一个例子来验证前面得到的结论.

假设 $N=\{1,2,3,4,5,6\}$, $P=\{1,2,3,4,5\}$,给定模糊模式集:

这里取 $T=$“$\wedge$”, 权矩阵 $W$ 设为: $W=$

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.7 & 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.7 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.8 & 0.3 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

**表 1　输入模糊模式集**

| $k$ | $B_k$ |
|---|---|
| 1 | (0.6, 0.5, 0.6, 0.8, 0.3, 0.6) |
| 2 | (0.5, 0.7, 0.7, 0.8, 0.7, 0.6) |
| 3 | (0.6, 0.4, 0.7, 0.3, 0.7, 0.4) |
| 4 | (0.5, 0.7, 0.4, 0.3, 0.7, 0.6) |
| 5 | (0.4, 0.7, 0.7, 0.8, 0.3, 0.5) |

注意到 $W$ 是对角占优的, 因而有 $W \subset W^2$. 由定理 1 和定理 2, 易知 $B_k(\forall k \in P)$ 为系统(4)的吸引子, 下面来求系统(4)的每个吸引子的吸引域. 由第三节 $G^i(B^k, W^*)$、$E^i(B^k, W^*)$、$GE(B^k, W^*)$、$E(B^k, W^*)$、$G(B^k, W^*)$、$L(B^k, W^*)$ 的定义, 可求得表 2、表 3、表 4 如下:

**表 2　$G^i(B^k, W^*)$**

| $i \backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Ø | {1} | Ø | {1} | {1} |
| 2 | {2} | Ø | {2,6} | Ø | Ø |
| 3 | {3} | Ø | Ø | {3} | Ø |
| 4 | Ø | Ø | {2,4,6} | {3,4} | Ø |
| 5 | {5} | Ø | Ø | Ø | {1,5} |
| 6 | Ø | Ø | {2,6} | Ø | {6} |

**表 3　$E^i(B^k, W^*)$**

| $i \backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | {1,5} | Ø | {1,2,4,6} | {3,4} | {5} |
| 2 | {5} | {2} | {4} | {2,3,4} | {1,2,5,6} |
| 3 | {5} | {3} | {2,3,4,6} | {4} | {1,3,5} |
| 4 | {2,3,4,5} | {4} | Ø | Ø | {1,4,5,6} |
| 5 | Ø | {1,5} | {2,4,5,6} | {1,3,4,5} | Ø |
| 6 | {2,5,6} | {6} | {4} | {3,4,6} | {1,5} |

**表 4　$GE(B^k, W^*)$、$E(B^k, W^*)$、$G(B^k, W^*)$、$L(B^k, W^*)$**

| $k$ | $GE(B^k, W^*)$ | $E(B^k, W^*)$ | $G(B^k, W^*)$ | $L(B^k, W^*)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | {2,3} | {1,4,6} | {5} | Ø |
| 2 | Ø | {2,3,4,5,6} | {1} | Ø |
| 3 | {2,6} | {1,3,5} | {4} | Ø |
| 4 | {1,3} | {2,5,6} | {4} | Ø |
| 5 | {1,6} | {2,3,4} | {5} | Ø |

进一步根据式(6), (7)可求出 $b_i^1(B^k, W^*)$、$b_i^2(B^k, W^*)$, 如表 5、表 6 所示:

**表 5　$b_i^1(B^k, W^*)$**

| $i \backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.6 | 0 | 0.6 | 0.4 | 0.3 |
| 2 | 0.3 | 0.7 | 0.3 | 0.7 | 0.7 |
| 3 | 0.3 | 0.7 | 0.7 | 0.3 | 0.7 |
| 4 | 0.8 | 0.8 | 0 | 0 | 0.8 |
| 5 | 0 | 0.7 | 0.7 | 0.7 | 0 |
| 6 | 0.6 | 0.6 | 0.3 | 0.6 | 0.4 |

**表 6　$b_i^2(B^k, W^*)$**

| $i \backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0 | 0.5 | 1.0 | 0.5 | 0.4 |
| 2 | 0.5 | 1.0 | 0.4 | 1.0 | 1.0 |
| 3 | 0.6 | 1.0 | 1.0 | 0.4 | 1.0 |
| 4 | 1.0 | 1.0 | 0.3 | 0.3 | 1.0 |
| 5 | 0.3 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.3 |
| 6 | 1.0 | 1.0 | 0.4 | 1.0 | 0.5 |

于是由式(8), 每个 $B^i$, $k \in P$ 之吸引域如下:

$$A_f(B^1, W^*) = [0.6,1] \times [0.3,0.5] \times [0.3,0.6] \times [0.8,1] \times [0,0.3] \times [0.6,1]$$

$$A_f(B^2, W^*) = [0,0.5] \times [0.7,1] \times [0.7,1] \times [0.8,1] \times [0.7,1] \times [0.6,1]$$

$$A_f(B^3, W^*) = [0.6,1] \times [0.3,0.4] \times [0.7,1] \times [0,0.3] \times [0.7,1] \times [0.3,0.4]$$

$$A_f(B^4, W^*) = [0.4,0.5] \times [0.7,1] \times [0.3,0.4] \times [0,0.3] \times [0.7,1] \times [0.6,1]$$

$$A_f(B^5, W^*) = [0.3,0.4] \times [0.7,1] \times [0.7,1] \times [0.8,1] \times [0,0.3] \times [0.4,0.5]$$

## 5　结束语

本文建立了基于一类 $T$-模的一种动态模糊神经网络-($\vee$, $T$) Hopfield 网. 文章首先证明了系统平衡态的 Lyapunov 稳定性及系统本身的稳定性, 然后建立了吸引子的一个非平凡吸引域, 使系统具有良好的容错性. 第四节通过例子验证了所得到的结论. 与本文密切相关的一个研究课题是:在给定一组模糊模式族的情况下, 如何找到系统有效的学习算法, 并通过解模糊关系方程得到系统尽可能大的非平凡吸引域.

## 参考文献:


[1] B Kosko. Fuzzy Associative Memories [M]. In Kandel A. (ed.), Fuzzy Expert Systems Readings, MA: Addison-Weley, 1987.

[2] A D Nola, S Sessa, W Pedrycz, E Sanchez. Fuzzy Relation Equations and Their Applications to Knowledge Engineering [M]. Kluwer Academic Publishers, 1989.

[3] P Y Liu. Max-min fuzzy Hopfield neural networks and an efficient learning algorithm [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 112(1): 41-49.

[4] P Y Liu. The fuzzy associative memory of max-min fuzzy neural networks with threshold [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 107(2): 147-157.

[5] 张文修, 王国俊, 等. 模糊数学引论 [M]. 西安:西安交通大学出版社, 1991.

[6] 李晓忠, 汪培庄. 模糊神经网络 [M]. 贵阳:贵州科技出版社, 1992.


## 作者简介:


**张义荣**　男. 1977 年 3 月出生于湖北省荆州市. 博士研究生. 1998 年 7 月毕业于国防科技大学系统工程与数学系, 2001 年 3 月于国防科技大学电子科学与工程学院获硕士学位, 同年入国防科技大学电子科学与工程学院攻读博士学位. 研究兴趣为图像处理、模糊信号处理、时频分析、目标检测和识别.